Двадцатый Российский Фестиваль юных математиков

Адлер. 17 октября 2009 г.

Третий тур. Лига стратегий

1. Дан клетчатый прямоугольник со стороной клеток, равной единице. Некоторые стороны некоторых клеток покрасили. Через $n(X,Y)$ обозначим количество способов дойти из узла X в узел Y, двигаясь только по закрашенным отрезкам направо и вверх. Узлы A, B, C и D лежат на левой, верхней, правой и нижней сторонах прямоугольника соответственно. Докажите, что

$$n(A,B)\cdot n(D,C) \geqslant n(A,C)\cdot n(D,B).$$

2. В выпуклом четырехугольнике $ABCD$ стороны AB и CD равны. Точки A_0, B_0, C_0 и D_0 — середины сторон AB, BC, CD и DA соответственно. Точка P не лежит на прямых AB, BC, CD и DA. Точка A_1 на стороне AB выбрана так, что лучи PA_0 и PA_1 симметричны относительно биссектрисы угла APB. Аналогичным образом определяются точки B_1, C_1 и D_1. Оказалось, что четырехугольник $A_1B_1C_1D_1$ — параллелограмм. Докажите, что расстояния от точки P до прямых AB и CD равны.

3. Пусть M — точка пересечения медиан треугольника ABC. Докажите неравенство

$$\sin\angle ACM + \sin\angle BAM \leqslant \frac{\sqrt{6}}{2}.$$

4. Пусть a, b, c и d — такие положительные числа, что $a \geqslant b \geqslant c \geqslant d$ и $(a-d)(b-c) = ad+bc$. Найдите минимальное значение выражения $\dfrac{a}{b+c+d}$.

5. Пусть $n > 1000$ — натуральное число. Натуральные числа $1 < a < b < n$ удовлетворяют соотношению $n! = a!\,b!$. Докажите, что $n - b < 100\ln\ln n$.

6. Вписанная в тетраэдр $SABC$ сфера ω касается его боковых граней в точках A_1, B_1 и C_1 соответственно. Прямая AA_1 вторично пересекает сферу ω в точке A_2, а прямая SA_2 вторично пересекает сферу ω в точке A_3, наконец прямая A_1A_3 пересекает ребро AS в точке A'. Точки B' и C' определяются аналогично. Докажите, что плоскость $A'B'C'$ касается сферы ω.

7. Раскраска вершин связного графа G в несколько цветов называется *t-периодической* ($t > 2$), если для любого простого пути, состоящего из t ребер, его концы — вершины одного цвета. В графе n вершин и более, чем $2tn$ ребер. Докажите, что в любой t-периодической раскраске его вершин используется не более двух цветов.

8. Существуют ли такие строго монотонные функции $f\colon \mathbb{N}\to\mathbb{N}$ и $g\colon \mathbb{N}\to\mathbb{N}$, что $f(g(g(n))) < g(f(n))$ при всех натуральных n?

9. Дано множество A состоящее из n элементов и A_1, A_2, …, A_n — его подмножества, содержащие более одного элемента. Оказалось, что любое двухэлементное подмножество множества A содержится ровно в одном из A_i. Докажите, что пересечение любых двух A_i непусто.

10. Для каких нечетных простых p существует такое натуральное число g, что множество остатков чисел k^2+1 при $k = 1, 2, \ldots, \frac{p-1}{2}$ и множество остатков чисел g^k, где $k = 1, 2, \ldots, \frac{p-1}{2}$ совпадают?